回路システム学第二(5)

2019.5.20

担当教官　山尾　泰

先週の学習項目

１．回路網関数(1)

２．演習(第1回レポート)

回路網関数(2)

伝達関数の特徴

$$Y(s) = H(s)X(s)$$ において、

（1）伝達関数は回路の複素周波数（s）領域での応答特性を決定

（2）任意の入力に対する出力を伝達関数から求めることができる

さらに入力 $x(t)$ が単位インパルス関数 $\delta(t)$ ならば、

そのラプラス変換 $X(s)$ は 1 となるので

$$Y(s)\Big|_{x=\delta} = H(s)$$

したがって

（3）伝達関数 $H(s)$ はインパルス応答のラプラス変換である

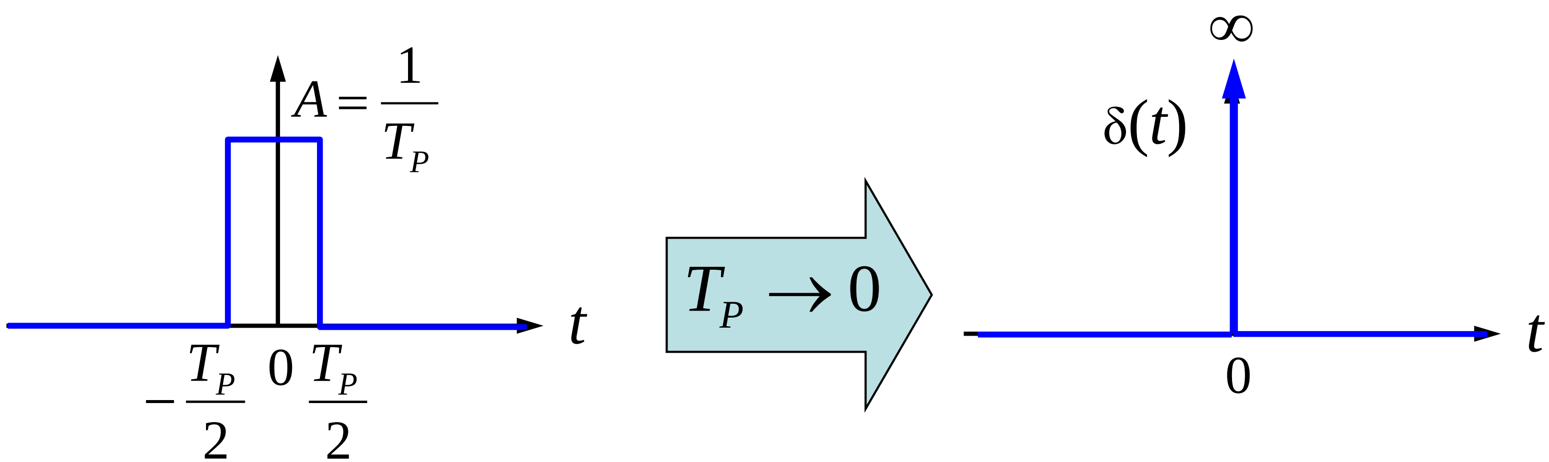
単位インパルス関数

単位インパルス関数 δ(*t*) は

$$\left.\begin{array}{ll}\delta(t)=0, & t\neq 0\\ \delta(t)\rightarrow+\infty, & t=0\end{array}\right\}\ \text{かつ}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

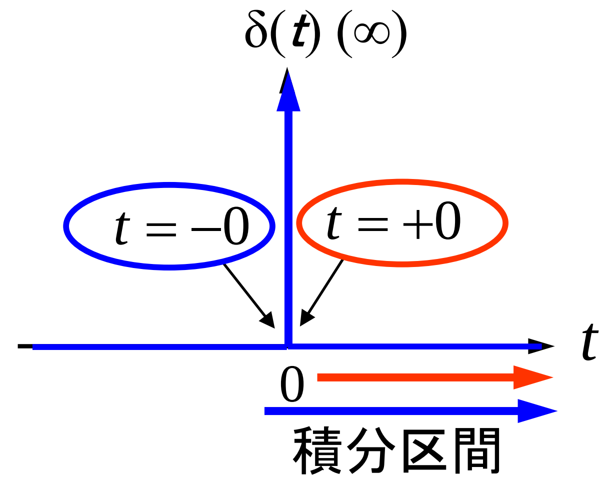
を満たす概念上の関数である

この関数の説明としては、単一矩形パルスのパルス幅を、パルスの面積を1としたまま極限まで狭くしたもの、として言及されることが多い



単位インパルス関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t) dt$$



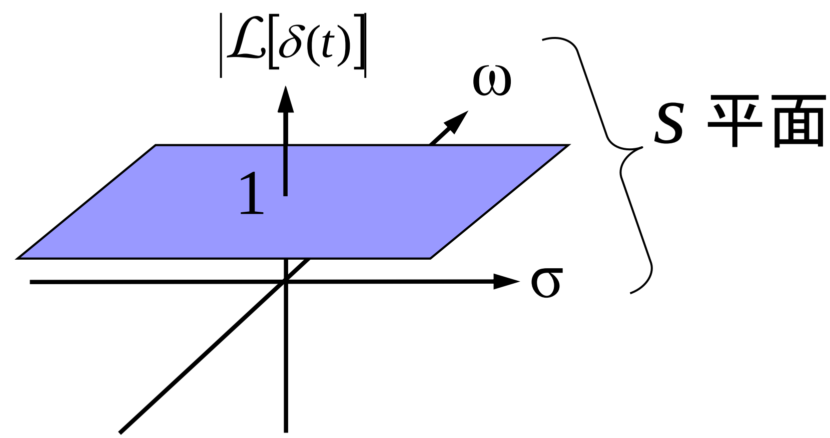
$$\boxed{\mathcal{L}_{-0}[\delta(t)] = 1,\quad \cancel{\mathcal{L}_{+0}[\delta(t)] = 0}}$$

意味がない

δ(t) のラプラス変換は、全ての s に対して値が1となる

したがって、入力がδ(t) の場合の回路応答（インパルス応答）のラプラス変換は、伝達関数そのものになる

$$Y(s)\Big|_{x=\delta} = H(s)$$



時間領域応答と周波数領域応答

時間領域応答

微分方程式

$$v(t) = r(t) + s(t)$$

過渡応答　定常応答

2つの時間波形の和

ラプラス変換

時間 ⟷ 周波数

関係が複雑

回路　入力

関係がシンプル

周波数領域応答

微分方程式は不要

$$V(s) = H(s) \cdot E(s)$$

出力 (s)　伝達関数　入力 (s)

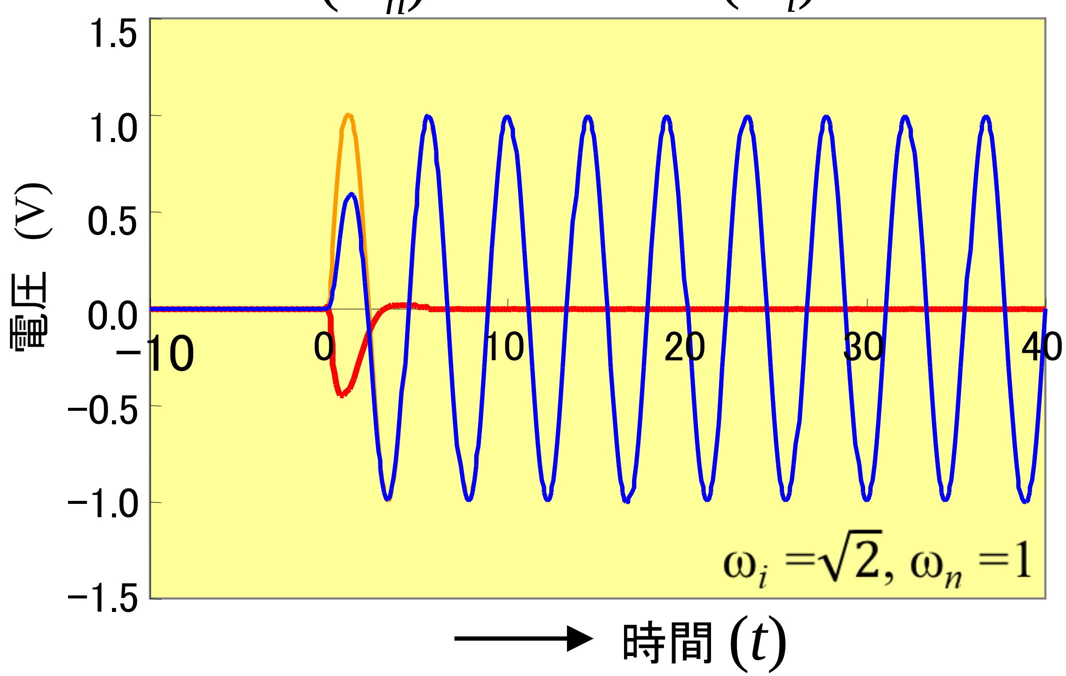
2つの周波数関数の積

時間領域での回路の応答

回路の応答とは？

過渡応答 ＋ 定常応答

(ω_n)　　(ω_i)



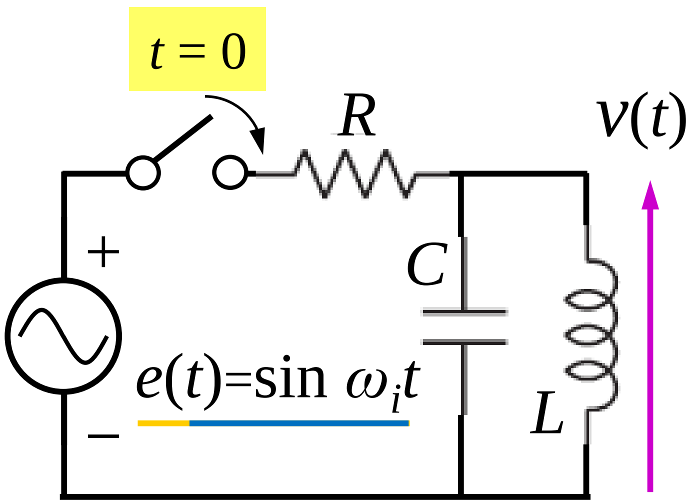


図1の回路

$R = 1[\Omega]$,

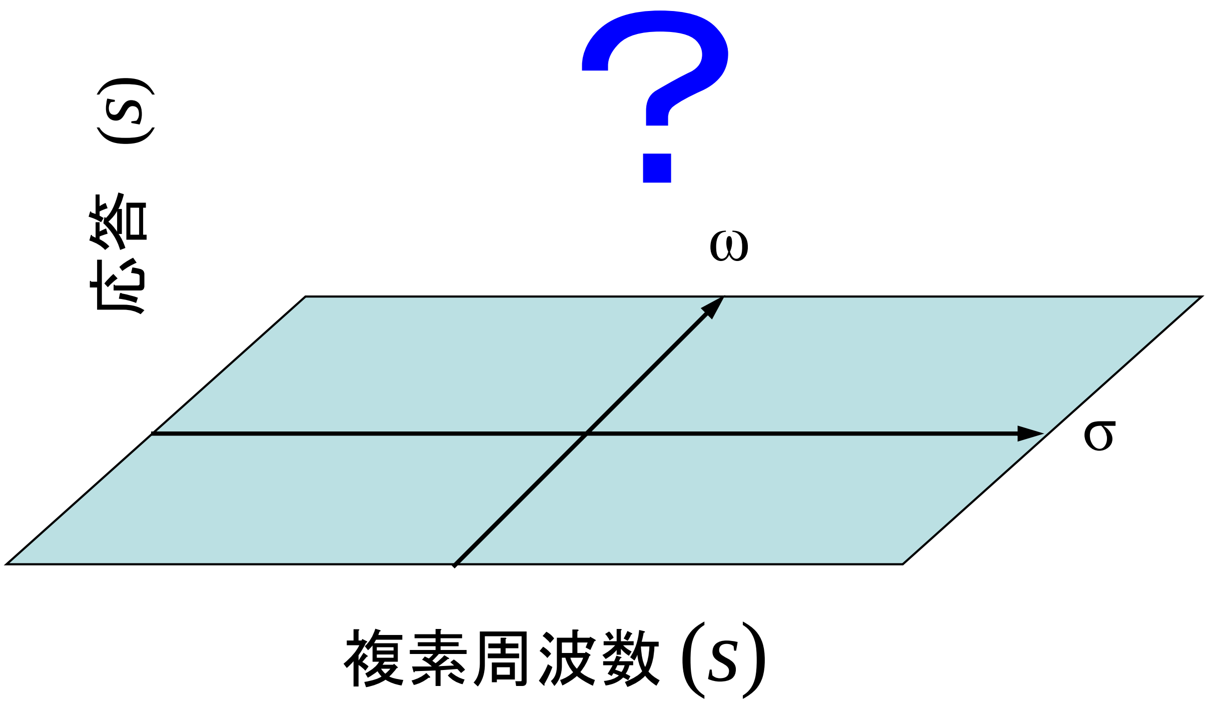
$C = 0.5[F]$,

$L = 1[H]$,

時間応答波形から両者の回路応答の解析ができた

複素周波数領域での解析(2)

では**複素周波数領域での回路応答（定常応答と過渡応答）**
はどのように表されるのか？



（1）複素周波数解析での過渡応答

回路網関数と回路の応答

回路の応答とは？

応答　伝達関数 $H(s)$　入力関数 $E(s)$

$$V(s)=\frac{2\rho s}{s^2+2\rho s+\omega_0^{\ 2}}\cdot\frac{\omega_i}{s^2+\omega_i^{\ 2}}=\underbrace{\frac{K_2}{s^2+2\rho s+\omega_0^{\ 2}}}_{V_n(s)}+\underbrace{\frac{K_1}{s^2+\omega_i^{\ 2}}}_{V_f(s)}$$

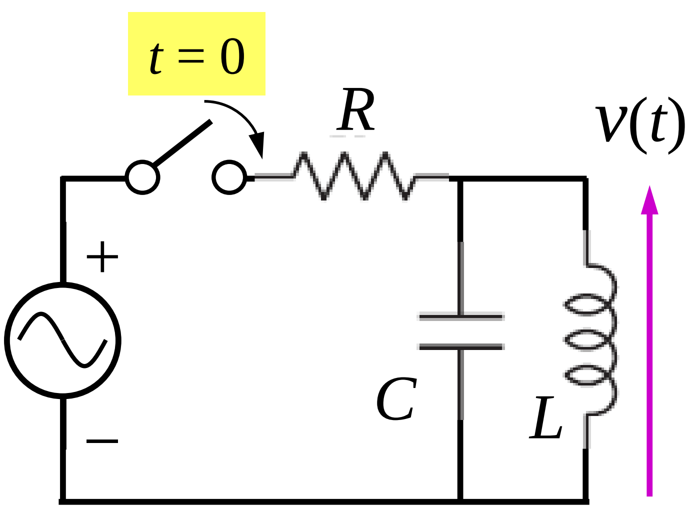
回路固有の過渡応答項

（1）

入力信号による強制（定常）応答項

（2）

$e(t)$
$=\sin\omega_i t$



複素周波数領域での回路応答(1)

図１の回路の出力 $v(t)$ を一般形で求めてみよう

もちろん入力 $e(t)=\sin\omega_i t$ は同じとする

$s=\sigma+j\omega$ のω と区別する

時刻 $t \geqq 0$ において、
端子電圧 $v(t)$ に成り立つ回路方程式は

$$\frac{dv}{dt}=\frac{de}{dt}-RC\frac{d^2v}{d^2t}-\frac{R}{L}v$$

これを微分次数順に整理すると

$$\frac{d^2v}{d^2t}+\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v=\frac{1}{RC}\frac{de}{dt}=\frac{1}{RC}\omega_i\cos\omega_i t$$

$t=0$

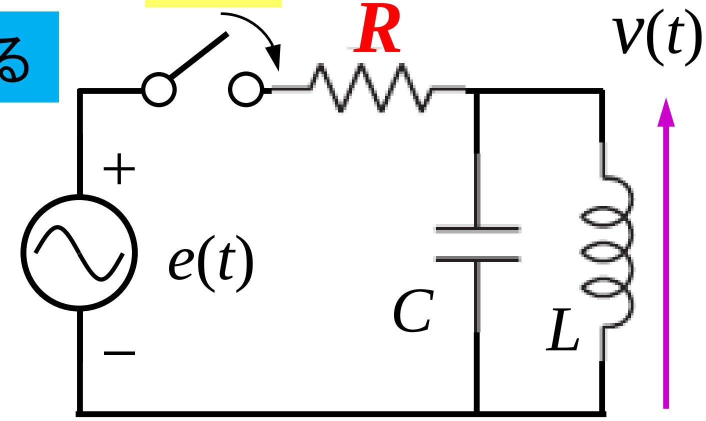


図１の回路

(続き)

これをラプラス変換すると

$$s^2V(s)+\frac{1}{RC}sV(s)+\frac{1}{LC}V(s)=\frac{1}{RC}\omega_i\left(\frac{s}{s^2+\omega_i^2}\right)$$

ここで $\boxed{\rho=\frac{1}{2RC},}$ $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ とおくと

$$V(s)=\frac{2\rho\omega_i s}{(s^2+\omega_i^2)(s^2+2\rho s+\omega_0^2)}=\frac{K_1}{s^2+\omega_i^2}+\frac{K_2}{s^2+2\rho s+\omega_0^2}$$

$V_f(s)$　入力信号による強制応答項

$V_n(s)$　回路固有の過渡応答項

ここで、L, C を固定して R を変化させよう

すると ρ が変化し、右辺第2項の回路固有の過渡応答項が変化する

その応答は、**分母の根** s_1, s_2 の性質に依存する　すなわち、

(続き)

(1) **実根**の場合（$\rho > \omega_0$）$s_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} < 0$ であり

時間領域応答 $v_n(t)$ は $v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$

(2) **重根**の場合（$\rho = \omega_0$）$s_{1,2} = -\rho < 0$ であり

時間領域応答 $v_n(t)$ は $v_n(t) = \left(At + B\right)e^{-\rho t}$

(3) **複素共役根**の場合（$\rho < \omega_0$）$s_{1,2} = -\rho \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$ であり

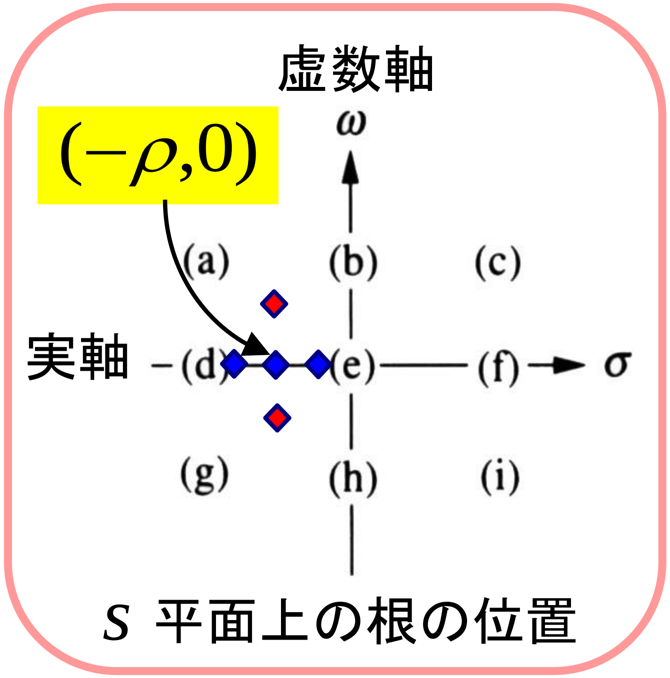
時間領域応答 $v_n(t)$ は

$$v_n(t) = e^{-\rho t}\left(A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}\,t\right)\right)$$

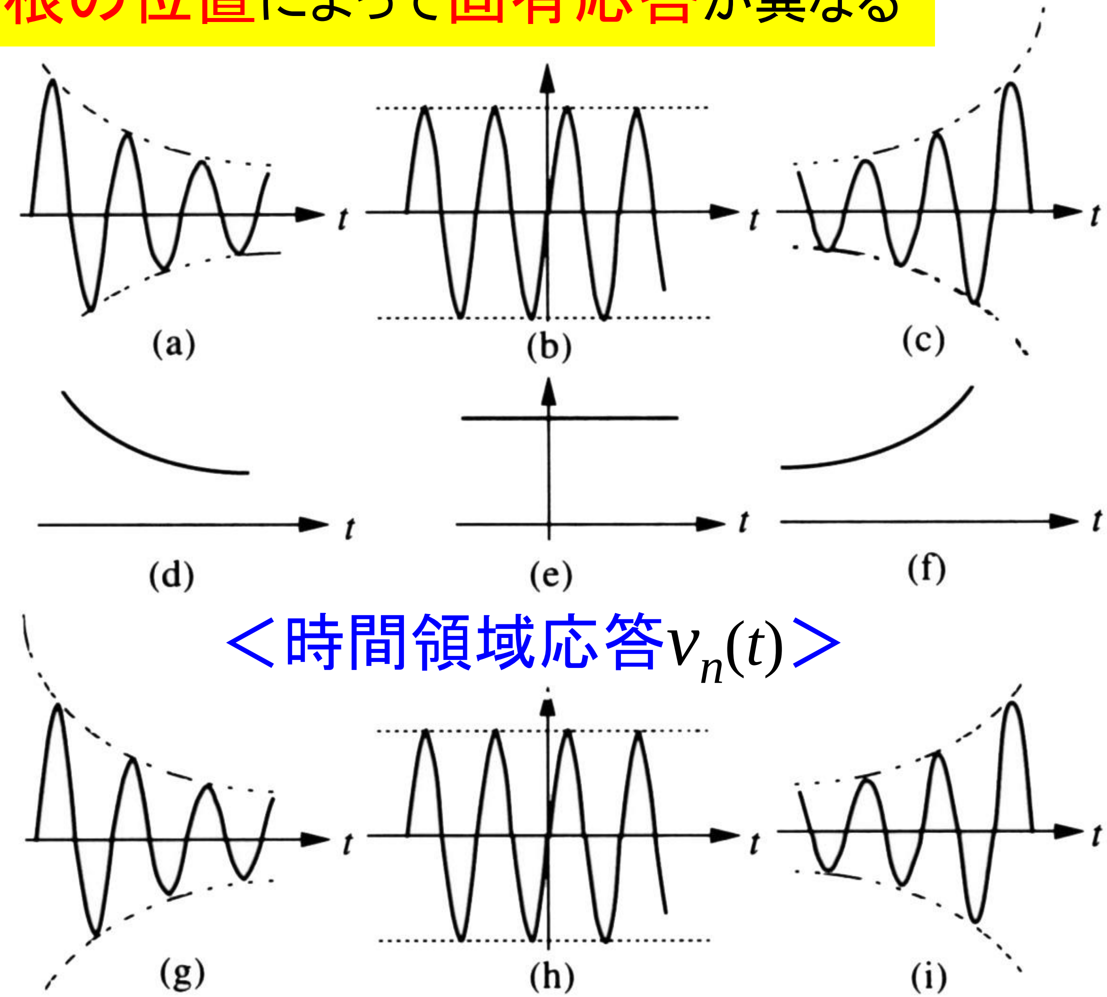
→ 固有振動の発生　$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} < \omega_0$　回路の固有周波数 または自然周波数

(続き)

以上から s 平面上の根の位置によって固有応答が異なる



s 平面上の根の位置



＜時間領域応答 $v_n(t)$＞

通常の回路では $\rho > 0$ であり、(a), (d), (g) のいずれかで減衰するが、超伝導または負性抵抗を有する回路では $\rho \leqq 0$ となりうるため、(b), (c), (e), (f), (h), (i) となる場合がある

(続き) ここで応答を伝達関数で表すと

$$V(s)=\frac{2\rho\omega_i s}{(s^2+\omega_i{}^2)(s^2+2\rho s+\omega_0{}^2)}=\frac{2\rho s}{s^2+2\rho s+\omega_0{}^2}\cdot\frac{\omega_i}{s^2+\omega_i{}^2}$$

伝達関数　入力信号のラプラス変換

固有応答の性質を決定する過渡応答項 $V_n(s)$の分母は伝達関数の分母である

一般にラプラス変換において、

$F(s)\rightarrow\infty$となる s_i を極、 $F(s)\rightarrow 0$となる s_j を零点という

伝達関数の分母を0にする s_i があれば極、分子を0にする s_j があれば零点となりうる

伝達関数の極（分母の根）を調べることで、回路の固有応答を知ることができる

図1の回路の伝達関数のs平面での表示の例

$$H(s)=\frac{2\rho s}{s^2+2\rho s+\omega_0{}^2} \qquad \therefore\ |H(s)|=\frac{2\rho|s|}{|s^2+2\rho s+\omega_0{}^2|}$$

例）$\rho=\dfrac{1}{2RC}=1,\quad \omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{2}$ の場合、

分母は　$s^2+2s+2=0$　極は複素共役根　$s=-1\pm j$

$s=\sigma+j\omega$ を代入すると

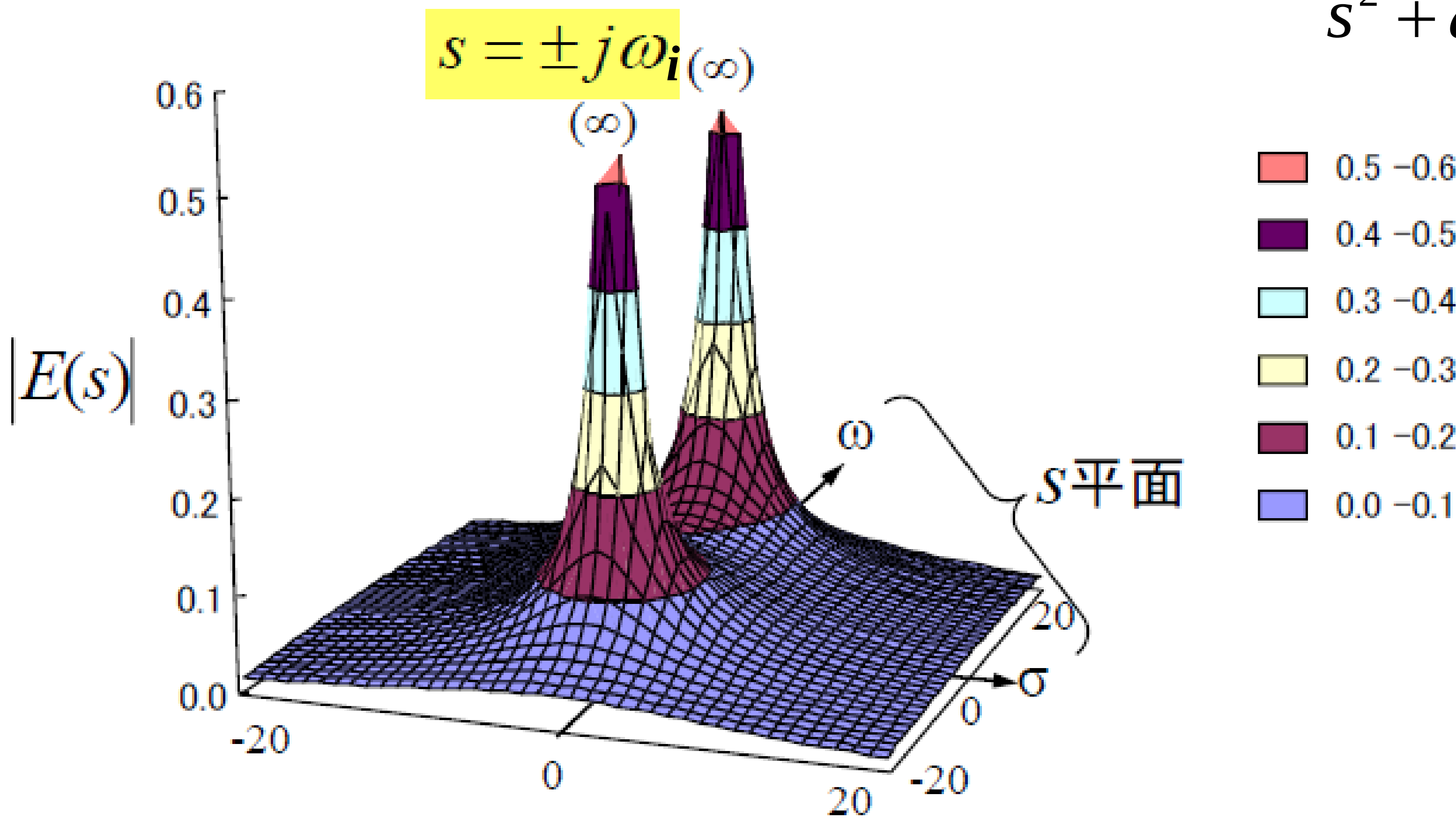
$$|H(s)|=2\sqrt{\frac{\sigma^2+\omega^2}{\left\{(\sigma+1)^2-\omega^2+1\right\}^2+4\omega^2(\sigma+1)^2}}$$

これを S平面上に表示すると

正弦波入力関数のラプラス変換

正弦波のラプラス変換

$$E(s) = \mathcal{L}[\sin \omega_i t] = \frac{\omega_i}{s^2 + \omega_i^2}$$

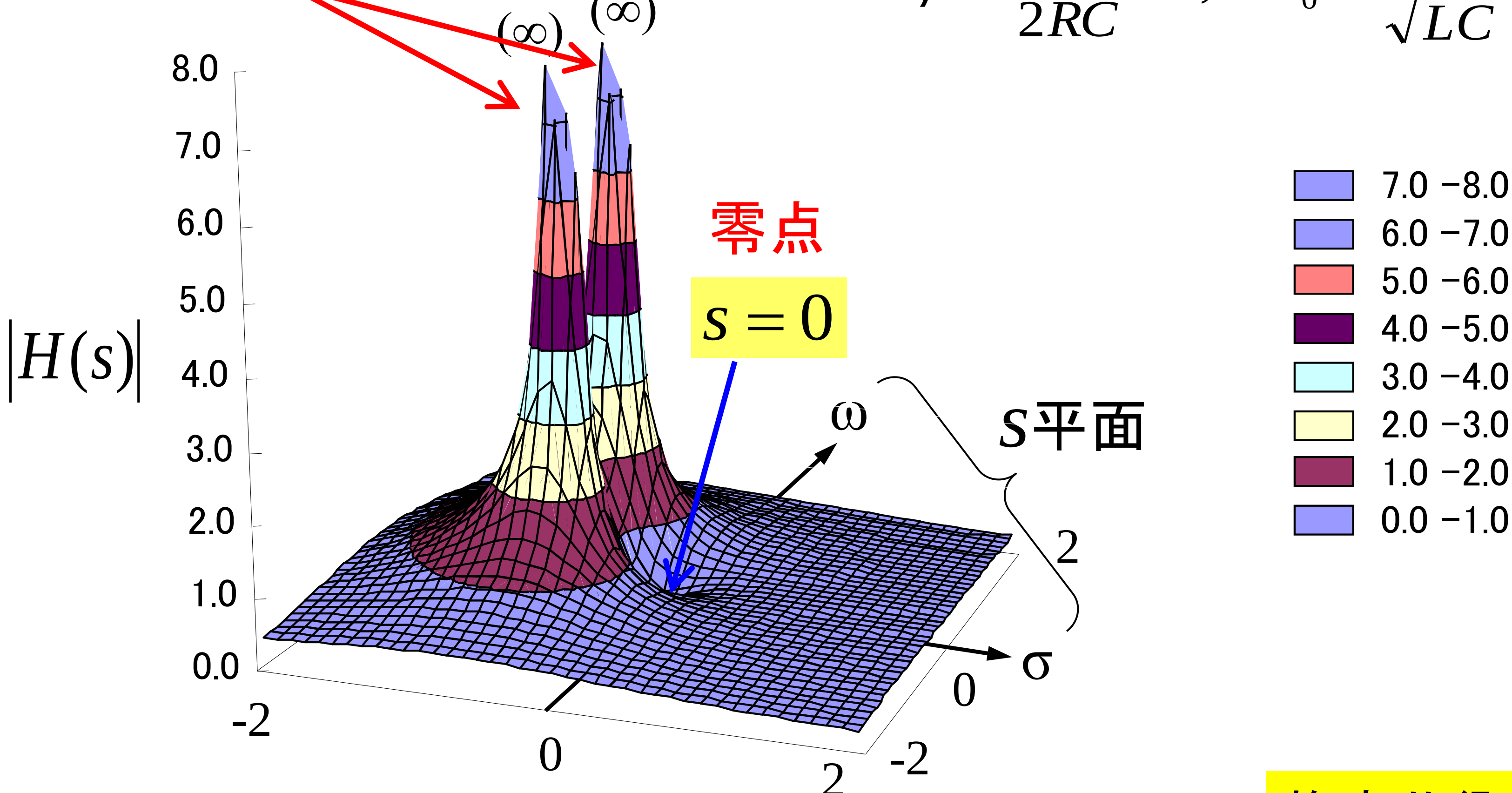


$s = \pm j\omega_i$にエネルギが集中 ⇒ **正弦波交流成分**を表す

図1の回路の伝達関数例

極 $s=-1\pm j$

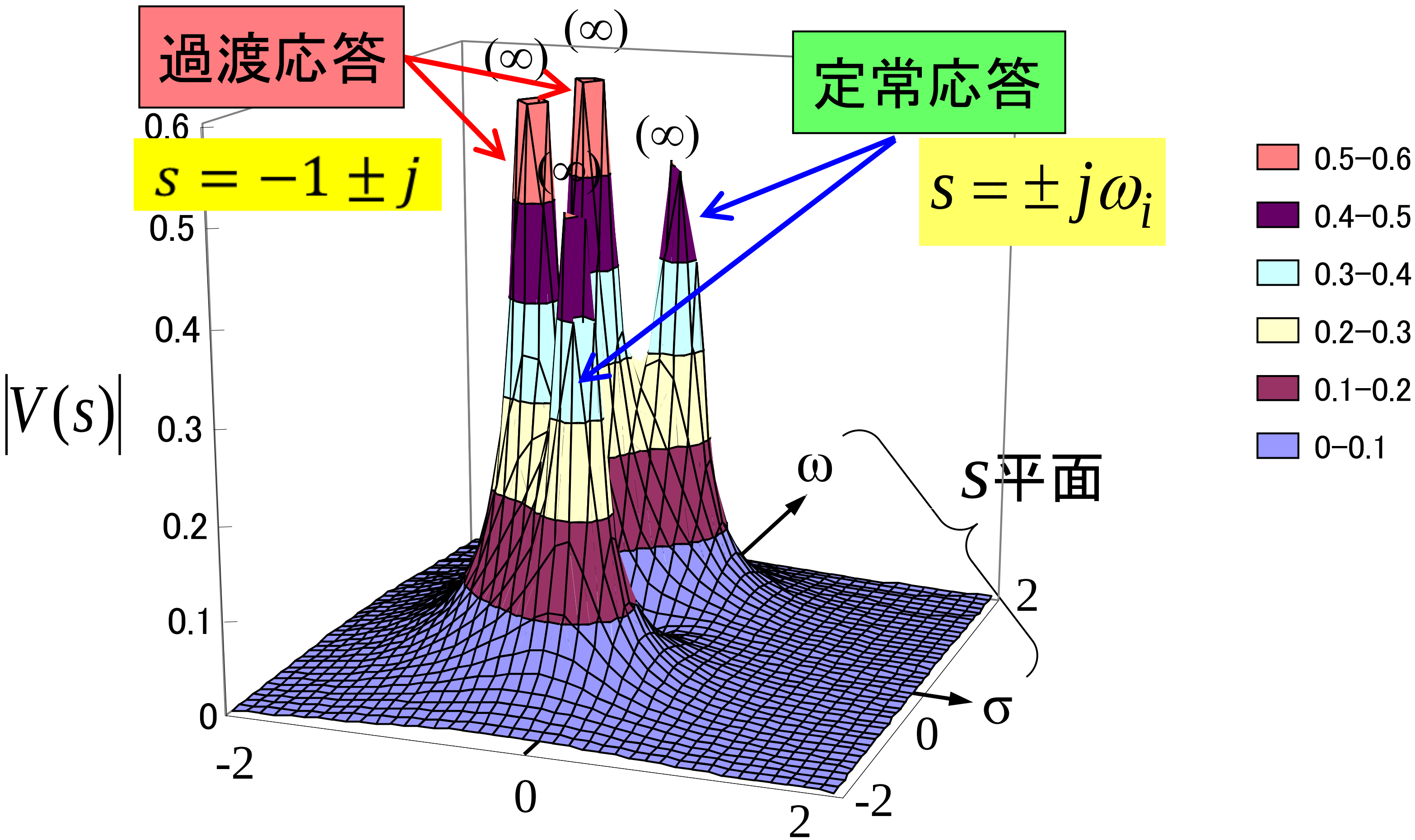
$$\rho=\frac{1}{2RC}=1,\quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{2}$$



極にエネルギが集中 → 過渡応答を表す → 複素共役根 ;固有振動

図1の回路の正弦波入力応答

$$V(s) = H(s)E(s)$$



定常応答と過渡応答の複合された出力となる